

·学科进展·

# 暂态信号的小波包去噪方法

林 敏 朱若谷

(中国计量学院计测系,杭州 310034)

**[摘 要]** 针对暂态信号的时频分布特点,提出了采用小波包的去噪新方法。首先采用小波包变换对暂态信号进行多尺度分解,搜索子频带范数随尺度变化而增大并达到峰值的子频带,然后对子频带内的小波系数进行阈值处理,最后进行信号重构。理论分析和实验结果表明本方法简单、有效。

**[关键词]** 小波包,暂态信号,子频带范数

如何在强背景噪声下提取出原信号或它的特征是工程上赋予信号处理技术的一项重要任务。传统上常用的相关、维纳滤波和匹配滤波等去噪方法,由于只是依据信号和噪声在时域特性或频域特性上的某些差别,因而只对有先验知识的信号有效,或只适用于频率成分集中且持续时间较长的信号。近几年提出的基于小波变换的各种非线性滤波方法,虽然信号和噪声的频谱可以任意重叠,但谱的幅度要尽可能地不同,这种方法只适用于在弱背景噪声下提取频率较低的信号。

小波变换的特点是在信号的低频端具有较高的频率分辨率,而在高频端的频率分辨率却较低,这种特性适用于语音、图像一类信号,而不具备普遍适用性。然而,在许多工程问题中我们往往只是对某些特定时间段或特定频率段的信号感兴趣,要提取的只是这些特定时间及特定频率附近的信息,因此我们希望在感兴趣的频带或感兴趣的时间段上有尽可能高的频率或时间分辨率,而小波变换不能满足这种要求。小波包是在小波变换的基础上进一步提出来的,它具有划分较高频率倍频程的能力,从而提高了频率的分辨率,能获得更好的频域局部化。

本文基于小波包的优良时频分析能力,通过引入子频带范数,提出了暂态信号去噪的新方法。理论分析和实验结果都表明这方法简单、有效,在信号、图像处理等领域有着良好的应用前景。

## 1 暂态信号的小波特性和

### 1.1 暂态信号的数学模型

对一个观察到的信号  $x(t)$ , 设其中含有原信号  $s(t)$ , 并含有噪声  $n(t)$ , 具体模型为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

其中  $n(t)$  为零均值的高斯白噪声, 方差为  $\sigma^2$ 。不失一般性, 不妨设暂态信号  $s(t)$  为:

$$s(t) = \sum_{i=1}^M A_i \exp[-a_i(t-t_i)^2] \cos[2\pi f_i t] \quad (2)$$

其中  $A_i, a_i, t_i, f_i$  分别是第  $i$  个信号的幅度、衰减指数、出现时间和频率。

### 1.2 小波包的子频带剖分

当采样率满足 Nyquist 要求时, 信号就在一个确定的有限频域中给定了。如果将信号  $x(k)$  占据的总频带  $(0 \sim \pi)$  定义为空间  $U_N^0$ , 经第一级小波包分解后,  $U_N^0$  被划分成两个子空间(子频带): 低频的  $U_{N-1}^0$  (频带  $0 \sim \frac{\pi}{2}$ ) 和高频的  $U_{N-1}^1$  (频带  $\frac{\pi}{2} \sim \pi$ )。经第二级小波包分解后,  $U_{N-1}^0$  又被剖分成低频的  $U_{N-2}^0$  (频带  $0 \sim \frac{\pi}{4}$ ) 和高频的  $U_{N-2}^1$  (频带  $\frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{2}$ ), 而  $U_{N-1}^1$  也被剖分成  $U_{N-2}^2$  (频带  $\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{4}$ ) 和  $U_{N-2}^3$  (频带  $\frac{3\pi}{4} \sim \pi$ )……, 如表 1 所示, 这种子频带剖分过程可以记作:

国家自然科学基金资助项目。

本文于 2000 年 6 月 1 日收到。

$$U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1} \quad (3)$$

表 1 子空间(子频带)  $U_N^0$  的分解

$U_N^0$							
$U_{N-1}^0$				$U_{N-1}^1$			
$U_{N-2}^0$		$U_{N-2}^1$		$U_{N-2}^2$		$U_{N-2}^3$	
$U_{N-3}^0$	$U_{N-3}^1$	$U_{N-3}^2$	$U_{N-3}^3$	$U_{N-3}^4$	$U_{N-3}^5$	$U_{N-3}^6$	$U_{N-3}^7$
.....							

对信号  $x(k)$  进行多级小波包分解,第  $L$  级共有子空间  $2^L$  个,即有  $2^L$  个子频带,随着  $L$  的增大,各子频带的宽度变窄,频率分辨率不断提高,与子空间对应的时频结构单元进一步细化,信号的时频局部特性得到了更好地刻画。

### 1.3 $s(t)$ 和 $n(t)$ 的小波特性

小波变换是一种线性变换,因此,  $x(t)$  的小波变换是由  $s(t)$  的小波变换和  $n(t)$  的小波变换线性叠加而成的。而  $s(t)$  和  $n(t)$  具有如下的小波特性:

#### (1) $s(t)$ 小波特性

在信号出现的短暂时间内,小波系数将出现极大模值;又由于信号频带较窄,必落在某一子频带内。因此,随着小波包分解级数的增大小波系数的极大模将稍稍增大,并达到一峰值。

#### (2) $n(t)$ 小波特性

白噪声具有负的奇异性,它的小波系数极大模和稠密度及方差均随着分解级数的增大而减小。

可见,信号和噪声具有截然不同的小波特性。在小波包变换下,随着分解级数的增大,信号的特征将越来越明显,而噪声成分却相对减弱,利用这些特

性可以对信号中的随机噪声进行去噪处理。

## 2 信号去噪处理方法

设采样后的信号  $x(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, 2^N$ ) 所在的子频带为  $U_N^0$ ,对  $x(k)$  经多级小波包分解后,各子频带的关系如图 1 所示。随着分解级数的增大,信号所在的子频带内的小波系数极大模稍稍增大而噪声的小波系数极大模却大大减小,而小波系数的幅值大小反映了它所携带的信号能量的多少。为此,引入子频带范数  $\|U\|_\infty$ 。

$$\|U\|_\infty = \max\{|d_i| : 1 \leq i \leq M\} \quad (4)$$

表示各子频带内的小波系数最大幅值,以反映信号能量在各子频带上的分布。(4)式中的  $d_i$  为子频带内的小波系数。将范数较大的子频带当作是信号所在的子频带,应予保留;而将大多数范数较小的子频带内的小波系数当作是由噪声产生的,在去噪时应予去除,再对保留下来的子频带内的小波系数设置浮动阈值,进一步抹去噪声成分。具体算法如下:

(1)对含噪信号进行  $J$  级小波包分解, $J$  应较大,以有效反映子频带的范数随分解级数  $L$  的变化,通常取  $J = 6$  或  $7$ 。

(2)当信噪比较低时,在较小分解层( $L$  较小)上的小波系数极大值的幅度主要是由噪声控制的。因此,从第 3 分解层( $L = 3$ )开始计算各子频带范数,如图 1 所示,  $\|U_{N-L}^k\|$  是子频带  $U_{N-L}^k$  的范数。

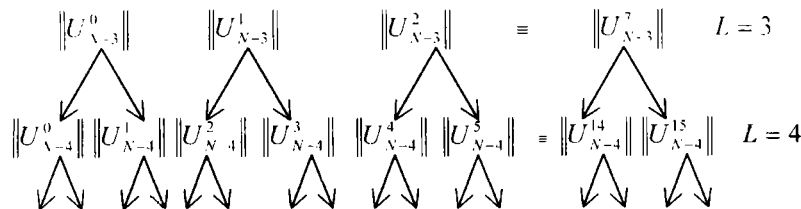


图 1 子频带范数的分层表示

(3)根据子频带一分为二的小波包分解特点,从  $L = 3$  层开始沿分解箭头方向考察范数随  $L$  的变化,如果随  $L$  的增大,范数出现一最大峰值,则保留该最大峰值所对应的子频带;随  $L$  的增大,范数不出现最大峰值的子频带内的小波系数视为零而舍去。

(4)保留下来的子频带内还含有噪声成分。为此设定下面的浮动阈值:

$$th = \frac{\sqrt{2 \log_2(M)}}{\sqrt{M}} A \quad (5)$$

式中  $M$  为子频带内的小波系数个数,  $A$  为式

(4)定义的子频带范数。将幅值小于  $th$  的小波系数置零,保留大于  $th$  的小波系数。

(5)由少数剩下的几个小波系数重建信号。

这种去噪处理方法在获得一定信噪比改善的同时,对信号的突变位置和载波频率又保持较高的分辨率,而且对待检信号形式不太敏感,比较适用于对一类非平稳信号进行时变滤波,这是维纳滤波、Savitzky-Golay 等一类滤波方法所不及的。

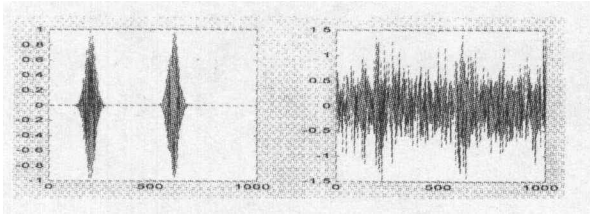
## 3 模拟结果与分析

本文选择双正交样条小波 bior 6.8<sup>[1]</sup>。考虑由

两个瞬时信号成分组成的信号  $s(t)$  :

$$s(t) = e^{-875(t-1/5)^2} \cos(2\pi 385t) + e^{-905(t-3/5)^2} \cos(2\pi 250t) \quad (6)$$

采样频率  $f_s = 1024$  Hz, 数据个数  $2^N = 2^{10} = 1024$ , 如图2所示, 左图是真正的信号  $s(k)$ ,



左: 真实信号波形图  $s(k)$  右: 叠加白噪声后的信号  $x(k)$

图2 含噪暂态信号波形图

右图是叠加上高斯白噪声后形成信号  $x(k)$ , 图中的横坐标是以时域的样本点为单位的, 信噪比  $SNR = -6.1188$  dB, 真正的信号完全被噪声淹没。根据上述去噪方法, 利用小波包对  $x(k)$  进行7级 ( $L = 7$ ) 分解, 得到各子频带内的小波系数, 从  $L = 3$  层开始计算各子频带范数, 如图3所示, 其中子频带范数随

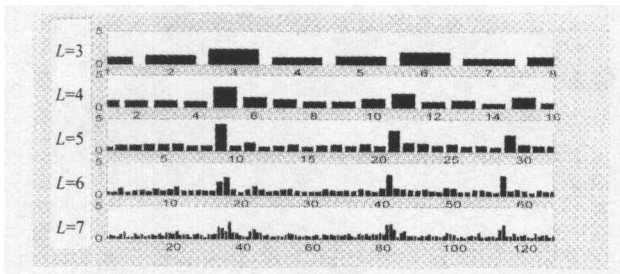


图3 各分解层的子频带范数

$L$  增大出现最大峰值的只有4个子频带, 数据如表2所示。为此, 保留  $U_{N-5}^8, U_{N-6}^{40}$  ( $U_{N-5}^{20}$  的范数虽略大于  $U_{N-6}^{40}$ , 但所含的噪声成分也大, 信噪比较低)、和4个子频带, 并引入小波系数浮动阈值进一步抹去噪声成分, 重建结果如图4所示, 上图是去噪后的信

号波形, 下图是误差曲线。模拟结果表明, 本文提出的去噪处理方法能在强噪声下提取出原信号, 能较准确地获取原信号的幅度、出现时间和频率等主要特征信息。去噪效果令人满意。

表2 子频带范数随  $L$  变化出现峰值的数据

子频带	范数	子频带	范数	子频带	范数	子频带	范数
$U_{N-3}^2$	2.4288	$U_{N-3}^5$	2.9645	$U_{N-3}^6$	1.0890	$U_{N-3}^7$	1.3690
$U_{N-4}^4$	3.2661	$U_{N-4}^{10}$	2.2921	$U_{N-4}^{12}$	1.2571	$U_{N-4}^{14}$	1.7376
$U_{N-5}^8$	4.2537	$U_{N-5}^{20}$	3.2600	$U_{N-5}^{24}$	1.1950	$U_{N-5}^{28}$	2.6253
$U_{N-6}^{16}$	2.1072	$U_{N-6}^{40}$	3.2280	$U_{N-6}^{48}$	1.2779	$U_{N-6}^{56}$	3.1213
$U_{N-7}^{32}$	1.9897	$U_{N-7}^{81}$	2.4104	$U_{N-7}^{97}$	1.1872	$U_{N-7}^{113}$	2.3278

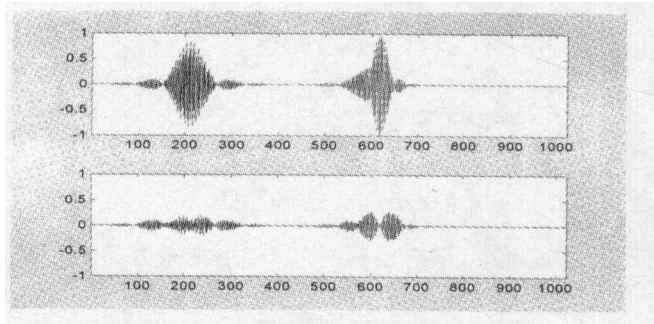


图4 去噪后的信号及误差

### 参 考 文 献

[1] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992.

[2] 陈逢时. 子波变换理论及其在信号处理中的应用. 北京: 国防工业出版社. 1998.

[3] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding, IEEE, Trans. on Inf. Theory, 1995, 41(3): 613—627.

[4] 范中, 田立生. 利用子波变换检测瞬时信号. 电子学报, 1996, 1: 78—82.

[5] 张磊, 潘泉等. 一种子波域滤波算法改进. 电子学报, 1999, 2: 19—21.

[6] Orfanidis S J. Introduction to Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.

## DE-NOISING A INSTANTANEOUS SIGNAL USING WAVELET PACKET

Lin Min     Zhu Ruogu

(China Institute of Metrology, HangZhou 310034)

**Abstract** In this paper a new noise cancelling mothod using wavelet packet is proposed. According to the the distribution of the instantaneous signal in time-frequency space, the instantaneous signal is decomposed with wavelet packet transformation and the subband that subband-norm reaches peak vaule with scale are searched. Then the wavelet coefficients in the subband are deat with threshold. Finally the signal is reconstructed. Both theoretical analysis and the results of experiments indicate that this method is simple and reliable.

**Key words** wavelet packet, instantaneous signals, subband-norm